Curs7

# Centrul de masă al continuului material

Continuul material este un sistem material în care masa este infinit divizibilă, spre deosebire de sistemul de puncte materiale care este divizibil până la nivelul punctului material. Considerăm un punct A aparținând sistemului, căruia îi asociem masa $dm$. Masa totală a continuului material este:

$$\mathrm{M} = \int_D dm \qquad (1)$$

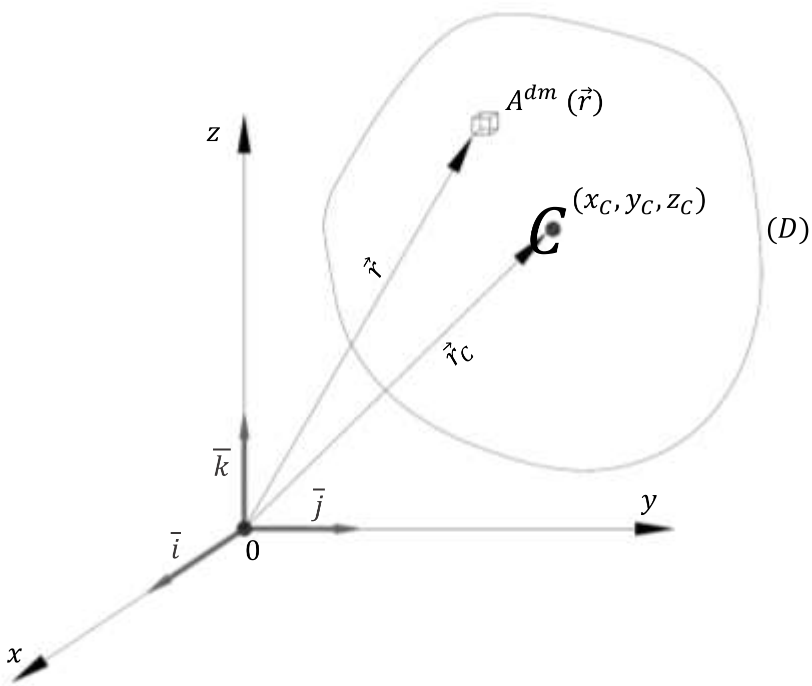


Figura 1 – Continuu material

1. **Momente statice.**

Considerăm un continuu material (D),momentul static al său este

$$\vec{\mathrm{S}}_{\mathrm{o}} = \int_D \vec{r}\, dm \qquad (2)$$

Teorema momentelor statice se scrie în acest caz:

$\int_D \vec{r}dm = M\vec{r}_c$ (3)

### 2. Determinarea poziției centrului de masă

Din relația (3) rezultă vectorul de poziție al centrului de masă:

$$\vec{r}_c = \frac{\int_D \vec{r}dm}{\int_D dm} \quad (4)$$

Dacă în sistemul de referință ales scriem expresiile analitice ale vectorilor din relația (4), rezultă coordonatele centrului de masă (C).

$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

$\vec{r}_c = x_c\vec{\imath} + y_c\vec{\jmath} + z_c\vec{k}$

$$x_c = \frac{\int_D xdm}{\int_D dm}, \quad y_c = \frac{\int_D ydm}{\int_D dm}, \quad z_c = \frac{\int_D zdm}{\int_D dm} \quad (5)$$

### 2a. Cazul continuului neomogen

În acest caz densitatea domeniului (D) este variabilă și are expresia: $\rho = \rho(x, y, z)$ Elementul diferential de masă $dm = \rho(x, y, z)dV$, dacă domeniul (D) este tridimensional, $dm = \rho(x, y, z)dA$, dacă domeniul (D) este bidimensional si $dm = \rho(x, y, z)ds$, dacă domeniul (D) este unidimensional.

$$\vec{r}_c = \frac{\int_D \vec{r}\,\rho(x, y, z)dV}{\int_D \rho(x, y, z)dV} \quad (6)$$

$$x_c = \frac{\int_D x\rho(x, y, z)dV}{\int_D \rho(x, y, z)dV}, \quad y_c = \frac{\int_D y\rho(x, y, z)dV}{\int_D \rho(x, y, z)dV}, \quad z_c = \frac{\int_D z\rho(x, y, z)dV}{\int_D \rho(x, y, z)dV} \quad (7)$$

$dV = dx\,dy\,dz$

În celelalte cazuri :bidimensional și unidimensional formulele se adaptează în mod corespunzător.

### 2b. Cazul continuului omogen

În acest caz, densitatea domeniului (D) este constantă $\rho = const$. Elementul diferențial de masă $dm = \rho dV$, dacă domeniul (D) este tridimensional, $dm = \rho dA$, dacă domeniul (D) este bidimensional si $dm = \rho ds$, dacă domeniul (D) este unidimensional.

$$\vec{r}_c = \frac{\int_D \vec{r}\, dV}{\int_D dV} \quad (8)$$

$$x_c = \frac{\int_D xdV}{\int_D dV}, \quad y_c = \frac{\int_D ydV}{\int_D dV}, \quad z_c = \frac{\int_D zdV}{\int_D dV} \quad (9)$$

$$dV = dxdydz$$

Dacă domeniul (D) bidimensional

$$x_c = \frac{\int_D xdA}{\int_D dA}, \quad y_c = \frac{\int_D ydA}{\int_D dA}, (10)$$

$$dA = dxdy$$

Dacă domeniul (D) este unidimensional spațial

$$x_c = \frac{\int_D xds}{\int_D ds}, \quad y_c = \frac{\int_D yds}{\int_D ds}, \quad z_c = \frac{\int_D zds}{\int_D ds} \quad (11)$$

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} du$$

Dacă se consideră ecuația curbei

$$x = x(u), y = y(u), z = z(u),$$

Și

$$ds = \sqrt{1 + f'^2(x)}\; dx$$

În cazul unei curbe plane $y = f(x)$.

Exemple particulare

- poziția centrului de masă pentru arcul de cerc:

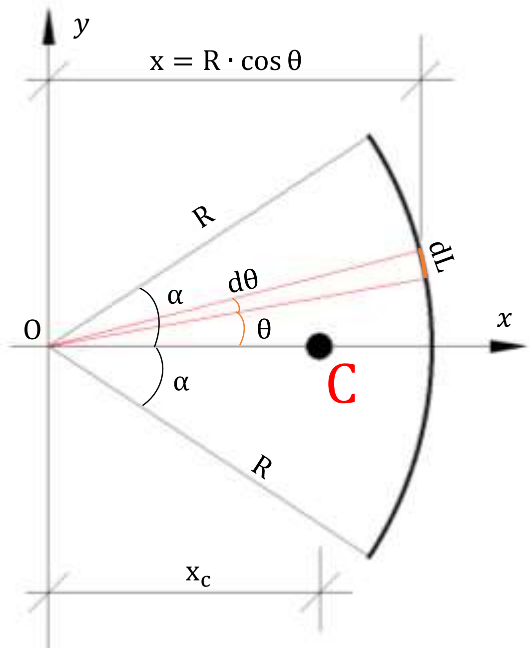


Figura 1a – Arc de cerc

$x = R \cdot \cos\theta$ – proiecția lui R pe axa x

$tg\ (d\theta) = d\theta = \frac{dL}{R}$ de care rezultă $dL = R \cdot d\theta$.

Rezultând:

$$x_c = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R\cos\theta \cdot R\, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} R\, d\theta} = \frac{R^2 \cdot \sin\theta|_{-\alpha}^{\alpha}}{R\ \theta|_{-\alpha}^{\alpha}} = \frac{R[\sin\alpha - \sin(-\alpha)]}{\alpha + \alpha} = \frac{2R\sin\alpha}{2\ \alpha} = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$y_c = 0$ – axa Ox este axă de simetrie

- poziția centrului de masă pentru sectorul circular:

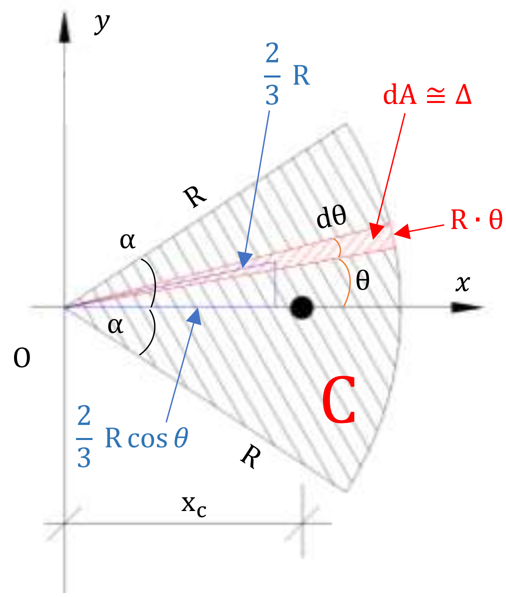


Figura 1b –Sector de cerc

$$dA = \frac{1}{2}\,R \cdot R \cdot d\theta = \frac{R^2}{2}\,d\theta$$

$$x_c = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2}{3} R\cos(\theta) \cdot \frac{R^2}{2}\,d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{R^2}{2}\,d\theta} = \frac{\frac{2}{3} R \cdot \sin\theta\Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{\theta\big|_{-\alpha}^{\alpha}} = \frac{2}{3} R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$y_c = 0$ – axa Ox este axă de simetrie

- poziția centrului de masă pentru un cilindru de rază *R* și înălțime *h*:

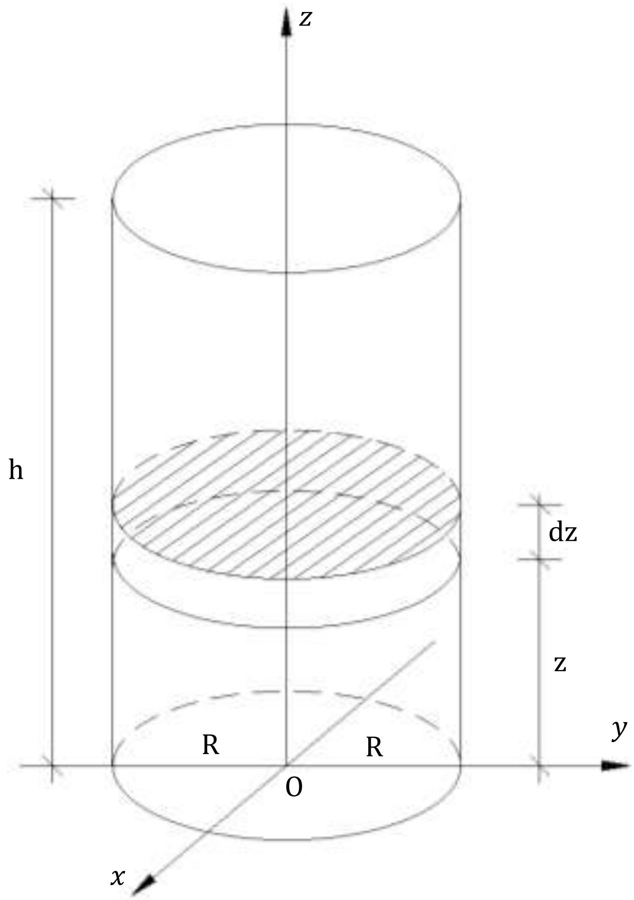


Figura 1c –Cilindru

$$dV = A \cdot dz = \pi\, R^2\, dz$$

$$z_C = \frac{\int_0^h z \cdot \pi R^2\, dz}{\int_0^h \pi R^2\, dz} = \frac{\frac{h^2}{2}}{h} = \frac{h}{2}$$

$x_c = 0$ și $y_c = 0$

# Echilibrul sistemelor materiale

1.Introducere în statică

Echilibrul sistemelor materiale constituie obiectul de studiu al primei părți din Mecanică, iar celelalte capitole care au precedat acest capitol au asigurat cunoștințele necesare exprimării condițiilor de echilibru ale sistemelor materiale.

Sistemele materiale se pot afla în două situații:

- sisteme libere, dacă pot ocupa orice poziție în spațiu, fără restricții,
- sisteme legate, dacă au restricții de mișcare. Aceste restricții se numesc **legături.**

Legăturile suprimă din gradele de libertate ale sistemului material liber. Un sistem material supus la legături va avea mai puține GL decât același sistem material liber. Analitic o legătură este echivalentă cu o relație între parametrii de poziție ai sistemului material. Existenta acestor relații face ca numărul parametrilor independenți necesari definirii poziției, față de un reper, să scadă, respectiv să-i anuleze posibilitățile de deplasare pe anumite direcții.

### 1.1 Grade de libertate (GL)

Gradele de libertate ale sistemelor materiale sunt reprezentate de posibilitățile lor de deplasare.
Poziția unui sistem material în spațiu se determină în funcție de anumiți parametri geometrici: coordonate, unghiuri în sistemul de referință ales.
Numărul gradelor de libertate ale unui sistem material, este egal cu numărul de parametri geometrici independenți, necesari pentru a determina poziția sa în spațiu sau în plan.

**1.2 Axioma existentei forțelor de legătură:**
Orice legătura este echivalentă, din punct de vedere mecanic, cu o forță de legătură sau **reacțiune.**

**Clasificarea legăturilor:**
**-** legături simple, suprima 1 GL
- legături complexe, suprimă mai multe GL

- legături unilaterale, obligă sistemul material de a nu părăsi legătura într-un sens al deplasării suprimate de legătură
- legături bilaterale obligă sistemul material de a nu părăsi legătura ambele sensuri ale deplasării suprimate de legătura
-legături punctuale, contactul dintre sistemul material și legătură se face într-un singur punct
- legături pe un domeniu, contactul dintre sistemul material și legătura se face în mai multe puncte ce aparțin unei curbe sau unei suprafețe
- legături lucii (fără frecare) între sistemul material și legătura nu există frecare
- legături aspre (cu frecare) între sistemul material și legătura există frecare

**1.3 Axioma eliberării de legături:**

Un sistem material legat se poate elibera de legăturile sale, astfel el se transformă într-un sistem material liber. În locul legăturilor se introduc, pe sistemul material, forțe de legătură sau reacțiuni.

**1.4 Teorema fundamentala a staticii:**

**Un sistem material liber, se găsește în echilibru (repaus), dacă forțele care acționează pe el formează un sistem de forte echivalent cu zero.**

## 2.Statica punctului material

### 2.1 Punctul material liber

Punctul material liber are în spațiu 3 GL, egal cu numărul parametrilor geometrici independenți necesari pentru a determina poziția sa față de un reper ales. Acești parametri sunt coordonatele sale. Pot fi alese coordonatele carteziene, cilindrice sau sferice.

Celor trei grade de libertate carteziene li se asociază mișcările punctului material pe axele Ox, Oy și Oz în ambele sensuri.

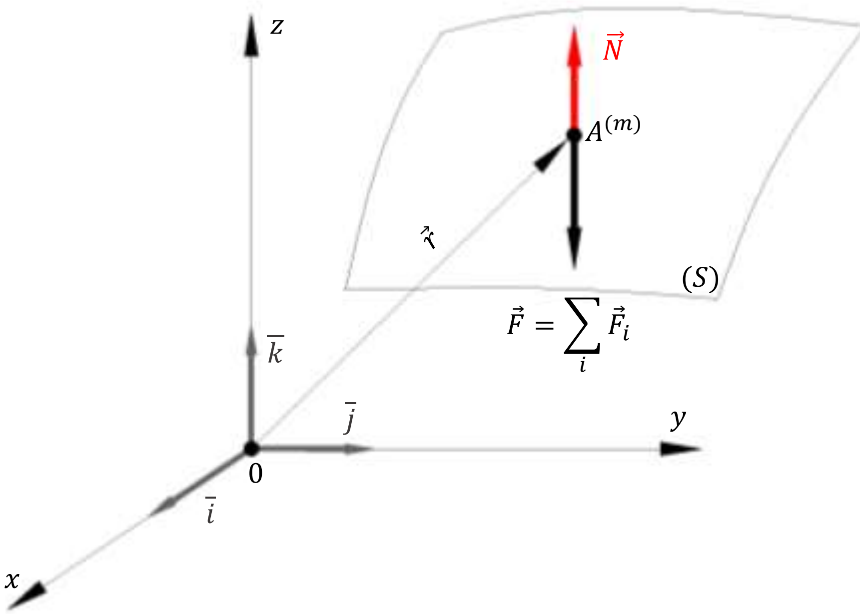


Figura 2 - Punct material pe o suprafață

În plan punctul material are două grade de libertate, coordonatele sale carteziene sau coordonatele polare.

Problema fundamentală a staticii punctului material liber este următoarea:

Se dă punctul material și forțele care acționează pe el. Se cere să se determine parametrii care determină poziția (pozițiile) sa de echilibru.

Rezolvarea problemei

Pentru rezolvarea problemei aplicăm teorema fundamentală a staticii.

Punctul material este acționat de un sistem de forțe concurente sau concurente și coplanare.$\{\vec{F}_i\}$. Relația vectorială de echivalență cu zero a unui sistem de forțe concurente este:

$\vec{R} = \vec{0}$. (12)

Dacă scriem expresiile analitice ale vectorilor din relația (12) avem:

$$\vec{F}_i = F_{ix}\overline{i} + F_{iy}\overline{j} + F_{iz}\overline{k}$$

$$\vec{R} = R_x\overline{i} + R_y\overline{j} + R_z\overline{k}$$

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}\,, \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy,} \qquad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}$$

Proiectând această relație pe axele sistemului cartezian de referință obținem ecuațiile scalare de echilibru necesare rezolvării problemei.

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Rezolvând acest sistem de ecuații obținem necunoscutele, care definesc poziția de echilibru a punctului.

Dacă echilibrul punctului material se stabilește în planul x0y avem:

$\vec{F_i} = F_{ix}\bar{i} + F_{iy}\bar{j}$

$\vec{R} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j}$

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases} \quad (14)$$